**Скалярное произведение в координатах**

**Определение:** Скалярным произведением двух векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image002_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image004_0000.gif называется ЧИСЛО, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:  
Формула скалярного произведения

**Результат операции является ЧИСЛОМ**: Умножается вектор на вектор, а получается число. Действительно, если длины векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image029.gif – это числа, косинус угла – число, то их произведение http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image031.gif тоже будет числом.

Пример 1

Найти скалярное произведение векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image002_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image004_0001.gif, если http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image034.gif

**Решение:** Используем формулу http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image036.gif. В данном случае:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image038.gif

**Ответ:**http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image040.gif

**Скалярное произведение векторов** http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image253.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image255.gif, заданных в ортонормированном базисе http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image257.gif, **выражается формулой** Формула скалярного произведения векторов плоскости в ортонормированном базисе

**Скалярное произведение векторов** http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image261.gif, заданных в ортонормированном базисе http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image263.gif, **выражается формулой** Формула скалярного произведения векторов пространства в ортонормированном базисе

Пример 2

Найти скалярное произведение векторов:  
а) http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image267.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image269.gif  
б) http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image271.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image273.gif, если даны точки http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image275.gif

**Решение:**  
а) Здесь даны векторы плоскости. По формуле http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image277.gif:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image279.gif

Пример 3

а) Проверить ортогональность векторов: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image302.gif и  http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image304.gif  
б) Выяснить, будут ли перпендикулярными отрезки http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image306.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image308.gif, если http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image310.gif

**Решение:**  
а) Выясним, будут ли ортогональны пространственные векторы. Вычислим их скалярное произведение:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image312.gif, следовательно, http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image314.gif

б) Здесь речь идёт об **обычных отрезках** плоскости (в чём сходство и различия вектора и отрезка, я очень подробно разъяснил на первом уроке). Речь идёт об обычных отрезках, а задача всё равно решается через векторы. Найдём векторы:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image316.gif

Вычислим их скалярное произведение:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image318.gif, значит, отрезки http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image306_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image308_0000.gif не перпендикулярны.

Обратите внимание на два существенных момента:

– В данном случае нас не интересует конкретное значение скалярного произведения, **важно, что оно не равно нулю**.

– В окончательном выводе «между строк» подразумевается: «если векторы не ортогональны, значит, соответствующие отрезки тоже не будут перпендикулярными». Геометрически это очевидно, поэтому можно сразу записывать вывод об отрезках:  «значит, отрезки http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image306_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image308_0001.gif не перпендикулярны».

**Ответ:**а) http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image314_0000.gif, б) отрезки http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image320.gif не перпендикулярны.

Пример 4

Даны четыре точки пространства http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image002_0003.gif. Выяснить будут ли перпендикулярными следующие **прямые**:  
а) http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image004_0003.gif;  
б) http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image006_0000.gif.

Это задача для самостоятельного решения. В условии требуется проверить перпендикулярность прямых. А решается задача снова через векторы по полной аналогии с предыдущим примером. Геометрически тоже всё очевидно – если удастся доказать перпендикулярность векторов, то из этого автоматически будет следовать перпендикулярность соответствующих прямых. Четыре вектора, которые вы найдёте, называют направляющими векторами прямых.

Полное решение и ответ в конце урока.

Мощь аналитической геометрии – в векторах. Так, в рассмотренных примерах, с помощью скалярного произведения можно установить не только ортогональность векторов самих по себе, но и перпендикулярность отрезков, прямых. И это приоткрылась только малая часть красоты предмета.

Завершая разговор об ортогональности, разберу ещё одну небольшую задачу, которая время от времени встречается на практике:

Пример 5

При каком значении http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image008.gif векторы http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image010_0000.gif будут ортогональны?

**Решение:**По условию требуется найти **такое** значение параметра http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image008_0000.gif, чтобы данные векторы были ортогональны. Два вектора пространства http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image012_0000.gif ортогональны тогда и только тогда, когда http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image014_0000.gif.

Дело за малым, составим уравнение:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image016_0000.gif

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image018_0000.gif

Решаем простейшее линейное уравнение:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image020_0000.gif

**Ответ:** при http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image022.gif

Пример 6

Найти скалярное произведение векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image033.gif, если http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image035.gif

**Решение:**напрашивается трафаретный путь предыдущего раздела, где мы раскрывали скобки: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image037.gif. Но зачем? Есть более лаконичное решение:

Найдём вектор http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image040_0000.gif:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image042_0000.gif  
Найдём вектор http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image044_0000.gif:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image046_0001.gif

Пример 7

Найти длины векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image060_0000.gif, если http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image062_0000.gif

**Решение:**снова напрашивается способ предыдущего раздела: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image064_0001.gif, но существует и другая дорога:

Найдём вектор http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image040_0001.gif:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image067.gif

И его длину по тривиальной формуле http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image069.gif:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image071.gif

Задачи:

1. Найти скалярное произведение векторов a и b, если:

1) http://kontromat.ru/scale/image080.png

2) http://kontromat.ru/scale/image086.png

3) http://kontromat.ru/scale/image090.png

4) http://kontromat.ru/scale/image094.png , a и b сонаправлены.

5) http://kontromat.ru/scale/image101.png , a и b противоположно направлены.

6) http://kontromat.ru/scale/image120.png, если известно, что http://kontromat.ru/scale/image122.png и http://kontromat.ru/scale/image124.png.

7) a = {1; 2; -5; 2} и b = {4; 8; 1; -2}.

8) a = {1; 2; -5} и b = {4; 8; 1}.

9) ***А*** = (-2; 3; 5) и ***B*** = (4; -1; 7)